Padrão de resposta - Prova de seleção de Mestrado-PPGMAT-UFAL 2022.1

1. Discuta brevemente se os seguintes conjuntos são abertos ou fechados. Determine ainda o interior e o fecho de cada conjunto.

   $A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$ em $\mathbb{R}$;

   $B = (1, 2)$ em $\mathbb{R}$;

   $C = \bigcap^{\infty}[-2, \frac{1}{n})$ em $\mathbb{R}$;

   $D = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

   Resposta:

   A não é fechado e nem aberto. $int(A) = \emptyset$ e $\bar{A} = A \cap \{0\}$.

   B não é fechado e é aberto. $int(B) = B$ e $\bar{B} = [1, 2]$.

   Observe que $C = [-2, 0]$ e logo é fechado e não é aberto com $int(C) = (-2.0)$ e $\bar{C} = C$.

   Veja que D não é aberto $\mathbb{R}$ pois dado qualquer racional em D, em qualquer intervalo aberto centrado nele contém números irracionais. D também não é fechado pois o complementar não é aberto pois todo intervalo em torno do zero contém racionais do tipo $1/n$ para n natural suficientemente grande. $int(D) = \emptyset$ e $\bar{D} = [0, 1]$.

2. Mostre que se $X \subset \mathbb{R}$ é tal que toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada. Então X é compacto.

   Resposta: Suponha que X não é compacto. Então X não é limitado ou X não é fechado. Se X não é limitado, a função contínua identidade de X em X não seria limitada, uma contradição com a hipótese. Caso X não fosse fechado então existiria um ponto $a \in \bar{X}$ tal que $a \notin X$. Considere então a função continua $h : X \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = \frac{1}{x-a}$. Basta verificar que h não é limitada e obter novamente uma contradição.

3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que a segunda derivada $f''(x)$ existe e é contínua em todo ponto $x \in (a, b)$. Seja $c \in (a, b)$. Mostre que

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2}.$$

   Resposta: Usando a fórmula de Taylor com resto no ponto c, obtemos que para $x, c \in (a, b)$, $x \neq c$, existe θ entre x e c tal que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\theta)}{2}(x-c)^2.$$

   Logo para todo $h > 0$, existe $\theta_1 \in (c, c+h)$ e $\theta_2 \in (c-h, c)$ tal que

$$f(c+h) = f(c) + f'(c)h + \frac{f''(\theta_1)}{2}h^2.$$

   e

$$f(c-h) = f(c) - f'(c)h + \frac{f''(\theta_2)}{2}h^2.$$

Portanto,

$$\frac{f(c+h)-2f(c)+f(c-h)}{h^2} = \frac{f''(\theta_1)+f''(\theta_2)}{2}$$

É claro que quando $h \to 0$, então $\theta_i \to c$ para $i = 1, 2$. E desde que $f''(x)$ é contínua em c, obtemos o resultado desejado.

4. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, ponha $m = \frac{a+b}{2}$ e prove que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]dx.$$

Resposta: O resultado segue após ser feito integrações por partes, o que é permitido visto que f e f' são integráveis. A seguir são dados os detalhes dos cálculos.

$$\begin{aligned}\frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x)+(x-m)f'(x)]dx &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx - \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx + \frac{2}{b-a}(x-m)f(x)\Big|_a^b \\ &= \frac{2}{b-a}(b-m)f(b) - \frac{2}{b-a}(a-m)f(a) \\ &\frac{2}{b-a}\frac{(b-a)}{2}f(b) - \frac{2}{b-a}\frac{(a-b)}{2}f(a) = f(b)+f(a).\end{aligned}$$

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$. Analise a convergência da série acima e em seguida determine $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$.

Resposta: Primeiramente a convergência uniforme da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ segue do fato $\left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ e de uma aplicação do teste de Weiertrass. Para o cálculo da integral deve-se usar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}dx = \frac{1}{n^3}(1-\cos(\pi n/2)) = \frac{2\operatorname{sen}(n\pi/4)}{n^3}$ e o fato da série de funções convergir uniformemente, o que permite fazer a integração de cada parcela da série termo a termo.